



REPUBLIQUE DU CAMEROUN
 Paix - Travail - Progrès
 UNIVERSITE DE DOUALA
 ECOLE NATIONALE SUPERIEURE
 POLYTECHNIQUE DE DOUALA
 CABINET DU DIRECTEUR
 B.P. 2701 Douala
 Tel. (237) 697 542 240
 Site web : www.enspd-udo.cm

REPUBLIC OF CAMEROON
 Peace - Work - Progress
 THE UNIVERSITY OF DOUALA
 NATIONAL HIGHER POLYTECHNIC
 SCHOOL OF DOUALA
 DIRECTOR OFFICE
 P.O. Box 2701 Douala
 Phone : (237) 697 542 240
 Email: contact@enspd-udo.cm



DEPARTEMENT DE TCO

Enseignant: Dr KIKMO

Cursus Sciences de l'Ingénieur 2

CC de fonctions à plusieurs variables

Crédit:3; Durée: 2h00; Effectifs:

Documents non autorisés

Année académique 2022/2023

Exercice 1

A. Soit A un point fixé de l'espace affine euclidien R^n , on considère l'application

$$f: \begin{cases} R^n \rightarrow R \\ M \mapsto \|\overrightarrow{AM}\|^2 \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur R^n .
2. Calculer $\text{grad } f(M)$ en utilisant l'expression de $f(M)$ en fonction des coordonnées de M .
3. Retrouver le résultat précédent en calculant $d.f_M(\vec{u})$ à partir de $f(M + \vec{u}) - f(M)$.

B. On considère l'application $f: \begin{cases} R^2 \rightarrow R^2 \\ (u, v) \mapsto (u^2 - v^2, 2uv) \end{cases}$

1. Déterminer les points où le jacobien s'annule.
2. Donner la différentielle de f au point $(1, 1)$.
3. Déterminer les antécédents par f d'un point (x, y) de R^2 .
4. On note D l'ensemble des points (u, v) tels que $v \geq 0$ et $u \geq 0$.
- 4.1. Montrer que la restriction f_1 de f à D est une bijection de D sur R^2 .
- 4.2. Montrer que la restriction de f_1 à $\tilde{D} = D \setminus \{(0;0)\}$ est un C^1 -difféo de $\tilde{D}$ sur $R^2 \setminus \{(0;0)\}$.

Exercice 2

Soit $U = \{(x, y) \in R^2 / x^2 - y^2 > 0\}$, on cherche toutes les fonctions $f: U \rightarrow R$ telle que

$$\forall (x, y) \in U, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} \quad (1).$$

1. Soit $g \in C^2(R^2, R)$, telle que $f(x, y) = g(x + y, x - y)$,
calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$ en fonction des dérivés de g .
2. En déduire les solutions de (1).

Exercice 3

A. On considère la forme différentielle $\omega: (x, y) \mapsto \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$.

1. Déterminer le domaine U de ω puis montrer que ω est de classe C^1 et est fermé sur U .
2. On suppose que ω est exacte sur U , il existe donc $F \in C^2(U, R)$ telle que, $\forall (x, y) \in U$, $\omega(x, y) = dF(x, y)$ et on définit $\varphi: R_+^* \times R \rightarrow U$
 $(r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$

- 2.1. on pose $G = F \circ \varphi$, calculer dG et en déduire qu'il existe $\lambda \in R$ tel que $G(r, \theta) = \theta + \lambda$
- 2.2. Relever une contradiction dans les résultats précédents puis conclure.

« Gardons sain et propre notre environnement! Et protégeons-le en adoptant une nouvelle attitude »



REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix - Travail - Progrès
UNIVERSITE DE DOUALA
ECOLE NATIONALE SUPERIEURE
POLYTECHNIQUE DE DOUALA
CABINET DU DIRECTEUR
P.O. Box 2701 Douala
Tél : (237) 697 642 240
Site web : www.enspd-udo.cm

REPUBLIC OF CAMEROON
Peace - Work - Progress
THE UNIVERSITY OF DOUALA
NATIONAL HIGHER POLYTECHNIC
SCHOOL OF DOUALA
DIRECTOR OFFICE
P.O. Box 2701 Douala
Phone : (237) 697 642 240
Email : contact@enspd-udo.cm



DEPARTEMENT DE TCO
Enseignant: Dr KIKMO
Cursus Sciences de l'Ingénieur 2

Examen de fonctions à plusieurs variables
Crédit:3; Durée: 2h00; Effectifs:
Documents non autorisés

Année académique 2022/2023

Exercice 1

A. Déterminer et représenter le domaine de définition des fonctions suivantes:

$$1. f(x, y) = \frac{\sqrt{-y+x^2}}{\sqrt{y}}, \quad 2. f(x, y) = \frac{\ln(y)}{\sqrt{x-y}}, \quad 3. f(x, y) = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2-1}}.$$

B. On considère l'application $f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) \mapsto (u^2 - v^2, 2uv) \end{cases}$

- Déterminer les points où le jacobien s'annule.
- Donner la différentielle de f au point $(1, 1)$.
- Déterminer les antécédents par f d'un point (x, y) de $\mathbb{R}^2$.
- On note D l'ensemble des points (u, v) tels que $v \geq 0$ et $u \geq 0$.
 - Montrer que la restriction f_1 de f à D est une bijection de D sur $\mathbb{R}^2$.
 - Montrer que la restriction de f_1 à $\tilde{D} = D \setminus \{(0;0)\}$ est un C^1 -difféo de $\tilde{D}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$.

Exercice 2

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0\}$, on cherche toutes les fonctions $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall (x, y) \in D, \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (1).$$

- Vérifier que $\varphi: (x, y) \mapsto \frac{y}{x}$ est solution du problème.
- Soit $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que $g \circ \varphi$ est solution de (1).
- Soit f une solution, montrer que $f(u, uv)$ ne dépend que de v .
- Donner l'ensemble des solutions.

Exercice 3

A. On considère la forme différentielle $\omega: (x, y) \mapsto \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$.

- Déterminer le domaine U de ω puis montrer que ω est de classe C^1 et est fermé sur U .
- On suppose que ω est exacte sur U , il existe donc $F \in C^2(U, \mathbb{R})$ telle que, $\forall (x, y) \in U$, $\omega(x, y) = dF(x, y)$ et on définit $\varphi: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow U$

$$(r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

21 on pose $G = F \circ \varphi$, calculer dG et en déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $G(r, \theta) = \theta + \lambda$

22 Relever une contradiction dans les résultats précédents puis conclure.

B. Calculer les différentielles des formes suivantes :

- $\omega = 2xydx + x^2dy$.
- $\omega = yz^2dx + (xz^2 + z)dy + (2xyz + 2z + y)dz$.
- $\omega = e^x + y + z[dx \wedge dy + dy \wedge dz + dz \wedge dx]$.
- Calculer $d(df)$ où $f \in C^2$.

« Gardons sain et propre notre environnement! Et protégeons-le en adoptant une nouvelle attitude »